

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0,$$

αν $y_1(x) = x^{-1}$ είναι μια ειδική λύση της.

2. Δοθέντος ότι $y_1(x) = x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

να βρεθεί μια δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση.

3. Έστω ότι $p(x)$ και $q(x)$ είναι δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα ανοικτό διάστημα I . Αν $y_1(x)$ είναι μια μη-μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

να βρεθεί η γενική της λύση.

ΛΥΣΗ

1. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$y(x) = x^{-1}u(x) \quad (1)$$

έχουμε

$$y' = x^{-1}u' - x^{-2}u,$$

και

$$y'' = x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u.$$

Αντικαθιστώντας έτσι στην δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$2x^{-2}\{x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u\} + 3x\{x^{-1}u' - x^{-2}u\} - x^{-1}u = 0$$

ή ισοδύναμα

$$2xu'' - u' = 0. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του u στην (2) είναι μηδέν, όπως θα έπρεπε. (Σημειώνουμε ότι ο μετασχηματισμός D'Alembert έχει πάντοτε αυτό το χαρακτηριστικό!). Θέτοντας τώρα στην (2)

$$u' = z \quad (3)$$

και επιλύοντας με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$u' = C\sqrt{x},$$

οπότε

$$u(x) = \frac{2}{3}Cx^{3/2} + D,$$

και άρα από την (1),

$$y(x) = x^{-1}u(x) = \frac{2}{3}C\sqrt{x} + Dx^{-1}, \quad (3)$$

όπου C, D είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Ο τύπος (3) δίνει την γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης (ελέγξτε το !!).

2. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$y(x) = xu(x) \quad (1)$$

έχουμε

$$y' = xu' + u,$$

και

$$y'' = xu'' + 2u'.$$

Αντικαθιστώντας έτσι στην δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$(1-x^2)(xu''+2u') - 2x(xu'+u) + 2xu = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$u'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2} \right) u' = 0 \quad . (2)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του u' δεν ορίζεται όταν $x = 0$, δηλ. στο σημείο που μηδενίζεται η $y_1(x)$. Εν τούτοις αυτό δεν θα δημιουργήσει πρόβλημα στην συνέχεια. Θα υπολογίσουμε πρώτα την λύση της (2) στα διαστήματα $-1 < x < 0$ και $0 < x < 1$ ξεχωριστά. Θέτοντας

$$u' = z,$$

και επιλύοντας με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$z(x) = Cx^{-2}(1-x^2)^{-1},$$

οπότε

$$\begin{aligned} u(x) &= C \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = C \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt \\ &= C \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) + D, \end{aligned}$$

και άρα από την (1),

$$y(x) = xu(x) = C \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) + Dx, \quad (3)$$

όπου C, D είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Ο τύπος (3) δίνει την γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$. Παρατηρούμε όμως ότι ενώ η συνάρτηση $u(x)$ δεν ορίζεται στο σημείο $x = 0$, το όριο της $xu(x)$ καθώς $x \rightarrow 0$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Εύκολα μάλιστα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η (3) δίνει την γενική λύση όχι μόνον στα $(-1,0)$ και $(0,1)$ αλλά σε όλο το διάστημα $(-1,1)$

. Παρεπιπτόντως βλέπουμε ότι η $y(x)$ δεν είναι φραγμένη καθώς $x \rightarrow \pm 1$, ένα φαινόμενο που είναι στενά συνδεδεμένο με το γεγονός ότι ο συντελεστής του y'' στην εξίσωση μηδενίζεται όταν $x = \pm 1$ ενώ αυτοί των y' και y όχι. Τέλος, αν θέσουμε $C = 1$, $D = 0$ στην (3) προκύπτει ότι μια δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης είναι η

$$y_2(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$$

3. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0 \quad (1)$$

έχουμε

$$y' = y_1 u' + y_1' u,$$

και

$$y'' = y_1 u'' + 2y_1' u' + y_1'' u.$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$u'' y_1 + u' (2y_1' + p y_1) + u (y_1'' + p y_1' + q y_1) = 0. \quad (2)$$

Όμως

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0,$$

και επειδή εξ' υποθέσεως η y_1' δεν είναι εκ ταυτότητος ίση με μηδέν, η (2) μπορεί να πάρει την μορφή

$$u'' + \left(p + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right) u' = 0. \quad (3)$$

Έτσι θέτοντας

$$u' = z$$

και επιλύοντας την (3) με την γνωστή μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$z(x) = C \exp \left[- \int \left(p(s) + 2 \frac{y_1'(s)}{y_1(s)} \right) ds \right] = C \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp \left(- \int p(s) ds \right),$$

οπότε

$$u(x) = C \left[\int \frac{1}{[y_1(t)]^2} \exp\left(-\int p(s) ds\right) dt \right] + D,$$

και άρα από την (1)

$$y(x) = C y_1(x) \left[\int \frac{1}{[y_1(t)]^2} \exp\left(-\int p(s) ds\right) dt \right] + D y_1(x) \quad . (4)$$

όπου C, D είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Ο τύπος (4) δίνει την γενική λύση της δοθείσας εξίσωσης.

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ Β' ΤΑΞΗΣ